# Лекция 1
# Ряды и преобразования Фурье.

## 1.1 Тригонометрические ряды

Определение 1. *Тригонометрическим рядом* $T(x)$ называется ряд вида

$$T(x) = \frac{1}{2}A_0(x) + \sum_{m=1}^{\infty} A_m(x),$$

где $A_0(x) = a_0$, $A_n = a_n \cos nx + b_n \sin nx$. При этом, $n$-я частичная сумма ряда $T(x)$ имеет вид

$$s_n(x) = \frac{1}{2}A_0(x) + \sum_{m=1}^{n} A_m(x).$$

Коэффициенты $a_n$ и $b_n$ заданы: первые для $n \geqslant 0$, вторые для $n \geqslant 1$.

Мы доопределим $a_n$, $b_n$ также для остальных целых значений $n$, положив

$$a_{-n} = a_n \quad (n > 0), \qquad b_0 = 0, \qquad b_{-n} = -b_n \quad (n > 0),$$

и обозначим

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n),$$

так что

$$a_n = c_n + c_{-n}, \qquad b_n = i(c_n - c_{-n}).$$

Таким образом, мы можем записать частичные суммы ряда $T(x)$ как

$$s_n(x) = c_0 + \sum_{m=1}^{n} \{(c_m + c_{-m}) \cos mx + i(c_m - c_{-m}) \sin mx\} =$$

$$= \sum_{m=-n}^{m=n} c_m e^{imx} = \sum_{m=-n}^{m=n} c_m \mathbf{e}_{m(x)},$$

а сам ряд, как

$$T(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n \mathbf{e}_{n(x)}.$$

Исходный и получившийся ряды называются *действительным* и *комплексным тригонометрическими рядами*, соответственно. Если тригонометрический ряд имеет суммой функцию $f(x)$, $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} s_n(x)$, то его коэффициенты могут быть просто выражены через $f(x)$ . Допустим, например, что ряд сходится равномерно:

Определение 2. Ряд сходится *равномерно* на отрезке $[a, b]$, если для всякого положительного числа $\varepsilon$ существует число $N$ такое, что для всех $n \geq N$ и для всех $x$ из отрезка $[a, b]$ выполняется неравенство

$$\|\lim_{m\to\infty} s_m(x) - s_n(x)\| \leq \varepsilon.$$

Тогда, помножив на $\cos mx$ и на $\sin mx$ или, в комплексном случае, на $e^{imx}$, проинтегрировав почленно от $-\pi$ до $\pi$ ,используя известные формулы:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx = \begin{cases} 0, m \neq n, \\ \pi, m = n \neq 0, \\ 2\pi, m = n = 0, \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx = \begin{cases} 0, m \neq n, \\ \pi, m = n \neq 0, \\ 0, m = n = 0, \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nx dx = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)x} dx = \begin{cases} 0, m \neq n, \\ 2\pi, m = n, \end{cases}$$

найдем, что

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx, \\ c_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx. \end{aligned}$$

Если $f$ действительна, то $a_n$ и $b_n$ действительны, а $c_n$ и $c_{-n}$ являются комплексно сопряженными. Если $f$ нечетна, то $a_n = 0$ и

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \sin nx dx.$$

Если $f$ четно, то $b_n = 0$ и формула для $a_n$ преобразуется аналогично.

## 1.2 Ряд Фурье и дискретное преобразование Фурье для функции периода $2\pi$

**Ряд Фурье для функции периода $2\pi$**

Пусть задана некоторая функция $f(x)$ периода $2\pi$, и мы хотим представить эту функцию в виде суммы тригонометрического ряда. Если такое представление возможно, то коэффициенты $a_n$ и $b_n$ ($c_n$) необходимо получаются с помощью формул (1.1). Определенные этим способом коэффициенты и $a_n$ и $b_n$ ($c_n$) называются *коэффициентами Фурье* для функции $f(x)$, а тригонометрический ряд с такими коэффициентами называется ее *рядом Фурье*. Наиболее часто используемым классом функций, для которых возможно их представление в виде ряда Фурье являются кусочно-гладкие функции.

Определение 3. Функцию $f(x)$ называют *кусочно-гладкой* на отрезке $[a, b]$, если она сама и ее производная либо непрерывны на этом отрезке, либо допускают на нем конечное число разрывов первого рода ( *разрывами первого рода функции* $g(x)$ называются точки $x_0$, где $g(x_0 - 0) = \lim\limits_{x \to x_0,\ x < x_0} g(x) \neq \lim\limits_{x \to x_0,\ x > x_0} g(x) = g(x_0 + 0)$).

Утверждение 1. Ряд Фурье функции $f(x)$ периода $2\pi$, кусочно-гладкой на любом конечном отрезке, сходится для всех значений $x$, причем его сумма равна $f(x)$ в каждой точке непрерывности и равна числу $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ в каждой точке разрыва. Если $f(x)$ всюду непрерывна, то ряд сходится абсолютно (т.е. сходится ряд из абсолютных величин членов исходного ряда) и равномерно.

**Дискретное преобразование Фурье для функции периода $2\pi$**

Система $\{\mathbf{e}_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ дискретна - в нее входят только целые "частоты"$n$. При численных расчетах, естественно, приходится ограничиваться конечными суммами $s_N$ и конечным диапазоном частот $[-N, N]$. Если же дискретизация производится и по отношению к переменной $x$, то мы приходим к *дискретному преобразованию Фурье*(ДПФ).Для него существует эффективный алгоритм расчета, называемый *быстрым преобразованием Фурье*(БПФ).

ДПФ (БПФ), ставящее в соответствие $2\pi$-периодической функции $f$ ее массив коэффициентов Фурье существенно рассматривает $f$, как функцию, заданную на всей прямой. При этом, при точной локализации информации о дискретизации функции $f(x)$, $y_n = f(2\pi n/N), 0 \leqslant n \leqslant N$ - экстремумов, пересечений нуля и т.д., информация о коэффициентах $c_n$ нелокальна! Рассматривая коэффициенты $c_n$ невозможно определить локальные характеристики $f$.

# Пример.

Разрывная функция

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(\pi - x), & 0 < x < 2\pi; \\ 0, & x = 0; \\ f(x + 2\pi), & \forall x. \end{cases}$$

имеет следующее представление в виде ряда Фурье:

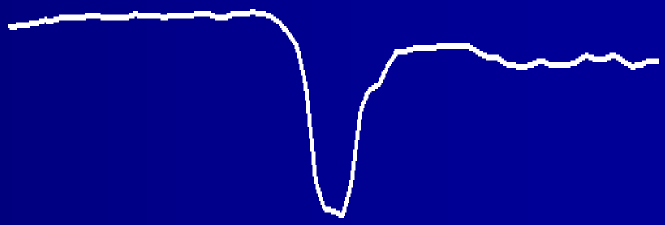
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin(nx).$$

Данный пример иллюстрирует еще одну неприятную особенность ряда и дискретного преобразования Фурье - эффект Гиббса. Так, сходимость в точках разрыва определяется Утверждением 1, но частичные суммы $s_N$ ряда Фурье превосходит максимум функции, равный $\pi/2$, в некоторой точке $x_N$ около нуля приблизительно на 18% !

Такой же эффект возникает и в общем случае при аппроксимации рядом Фурье функции, у которой есть разрывы первого рода.

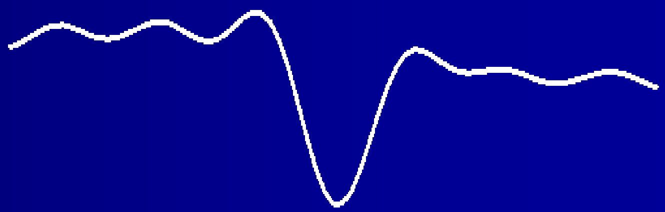
# Introduction

- Ringing effect (Gibbs phenomenon) appears in images as oscillations near sharp edges. It is a result of a cut-off of high-frequency information



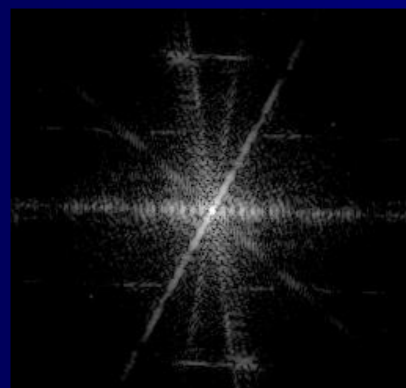
# Introduction

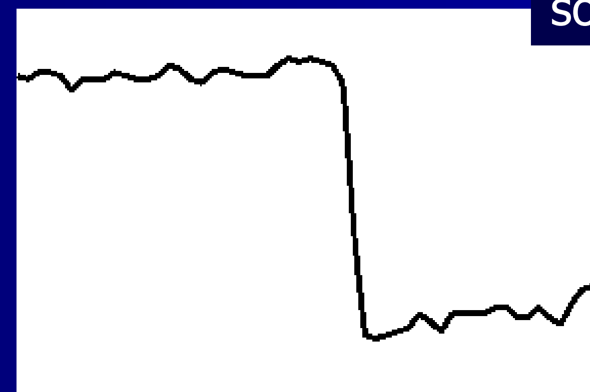
- Ringing effect (Gibbs phenomenon) appears in images as oscillations near sharp edges. It is a result of a cut-off of high-frequency information



# Artifact analysis

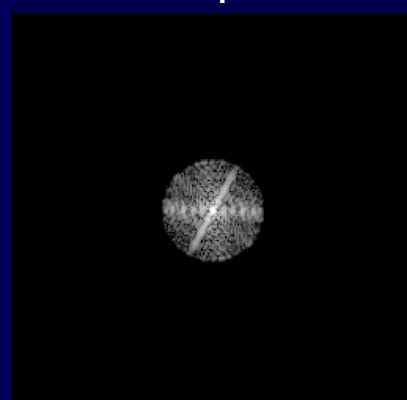
- Analysis of edge artifacts after high-frequency cut-off

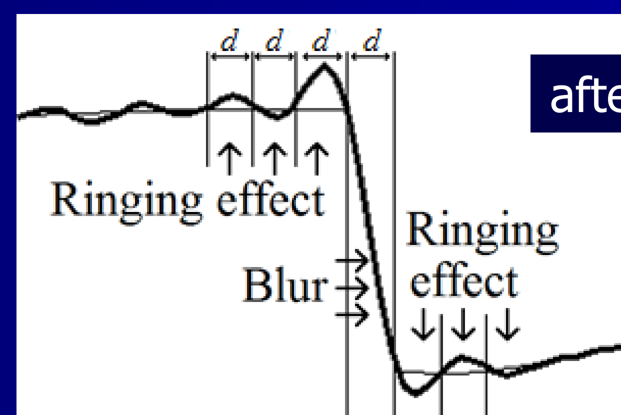




source

Fourier spectrum






after cut-off